Duální kvaterniony v prostorové kinematice

Jaroslav Hrdina
ÚM FSI VUT BRNO

2. workshop Aplikovaná matematika, Ostravice 2012

$1.2.\overline{12}$

Ostravice 2012

Definice

Algebra je vektorový prostor A nad reálnými čísly, ve kterém je definováno bilineární násobení

$$\star : A \times A \to A.$$

Definice

Algebra je vektorový prostor A nad reálnými čísly, ve kterém je definováno bilineární násobení

$$\star : A \times A \to A.$$

To znamená, že pro všechny $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in A$ platí:

- $(\alpha u + \beta v) \star w = \alpha u \star w + \beta v \star w$

Definice

Algebra je vektorový prostor A nad reálnými čísly, ve kterém je definováno bilineární násobení

$$\star : A \times A \to A.$$

To znamená, že pro všechny $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in A$ platí:

- $(\alpha u + \beta v) \star w = \alpha u \star w + \beta v \star w$
- $u \star (\alpha v + \beta w) = \alpha u \star v + \beta u \star w$

Definice

Algebra je vektorový prostor A nad reálnými čísly, ve kterém je definováno bilineární násobení

$$\star : A \times A \to A.$$

To znamená, že pro všechny $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $u, v, w \in A$ platí:

- $(\alpha u + \beta v) \star w = \alpha u \star w + \beta v \star w$
- $u \star (\alpha v + \beta w) = \alpha u \star v + \beta u \star w$

Algebry můžou bát asociativní, komutativní, ...

Reálná čísla $\mathbb{R}$

Reálná čísla $\mathbb{R}$

Komplexní čísla $\mathbb{C}$

$$a + bi, \ a, b \in \mathbb{R}, \ i^2 = -1$$

Reálná čísla $\mathbb{R}$

Komplexní čísla $\mathbb{C}$

$$a + bi, \; a, b \in \mathbb{R}, \; i^2 = -1$$

Duální čísla $\mathbb{D}$

$$a + b\epsilon, \; a, b \in \mathbb{R}, \; \epsilon^2 = 0$$

Reálná čísla $\mathbb{R}$

Komplexní čísla $\mathbb{C}$

$$a + bi,\ a, b \in \mathbb{R},\ i^2 = -1$$

Duální čísla $\mathbb{D}$

$$a + b\epsilon,\ a, b \in \mathbb{R},\ \epsilon^2 = 0$$

Kvaterniony $\mathbb{H}$

$$a + bi + cj + dk,\ a, b, c, d \in \mathbb{R},\ i^2 = j^2 = -1,\ ij = -ji = k$$

Duální kvaterniony $\mathbb{D} \otimes \mathbb{H}$

Definice

$$a + bi + cj + dk, \; a, b, c, d \in \mathbb{D}, \; i^2 = j^2 = -1, \; ij = -ji = k$$

Duální kvaterniony $\mathbb{D} \otimes \mathbb{H}$

Definice

$$a + bi + cj + dk, \; a, b, c, d \in \mathbb{D}, \; i^2 = j^2 = -1, \; ij = -ji = k$$

$\cdot$	1	i	j	k	ϵ	ϵ i	ϵ j	ϵ k
1	1	i	j	k	ϵ	ϵ i	ϵ j	ϵ k
i	i	-1	k	-j	ϵ i	-ϵ	ϵ k	-ϵ j
j	j	-k	-1	i	ϵ j	-ϵ k	-ϵ	ϵ i
k	k	j	-i	-1	ϵ k	ϵ j	-ϵ i	-ϵ
ϵ	ϵ	ϵ i	ϵ j	ϵ k	0	0	0	0
ϵ i	ϵ i	-ϵ	ϵ k	-ϵ j	0	0	0	0
ϵ j	ϵ j	-ϵ k	-ϵ	ϵ i	0	0	0	0
ϵ k	ϵ k	ϵ j	-ϵ i	-ϵ	0	0	0	0

Ostravice 2012

Metrický prostor

Neprázdná množina M, zobrazení $d : M \times M \to \mathbb{R}$ takové, že

1. $d(x,x) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Metrický prostor

Neprázdná množina M, zobrazení $d : M \times M \to \mathbb{R}$ takové, že

1. $d(x,x) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Izometrie

$(M_1, d_1), (M_2, d_2)$, $f : M_1 \to M_2$ takové, že

$$d_1(x,y) = d_2(f(x), f(y))$$

Metrický prostor

Neprázdná množina M, zobrazení $d : M \times M \to \mathbb{R}$ takové, že

1. $d(x,x) \geq 0,\ d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x,y) = d(y,x)$
3. $d(x,y) + d(y,z) \geq d(x,z)$

Izometrie

$(M_1, d_1), (M_2, d_2)$, $f : M_1 \to M_2$ takové, že

$$d_1(x,y) = d_2(f(x), f(y))$$

$\mathbb{E}^3$

$M = \mathbb{R}^3$, $A_1 = [x_1, y_1, z_1]$, $A_2 = [x_2, y_2, z_2]$

$$d(A_1, A_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Zaměření

Střed dvojice

$A, B \in \mathbb{E}^3$, střed dvojice (A, B) je jednoznačně daný bod $S \in \mathbb{E}^3$ takový, že $d(A, S) = d(S, A) = \frac{1}{2} d(A, B)$

Zaměření

Střed dvojice

$A, B \in \mathbb{E}^3$, střed dvojice (A, B) je jednoznačně daný bod $S \in \mathbb{E}^3$ takový, že $d(A, S) = d(S, A) = \frac{1}{2} d(A, B)$

Volný vektor

Zavedeme relaci na $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$, $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2)$ právě tehdy když dvojice (A_1, B_2) a (A_2, B_1) mají stejný střed.

Zaměření

Střed dvojice

$A, B \in \mathbb{E}^3$, střed dvojice (A, B) je jednoznačně daný bod $S \in \mathbb{E}^3$ takový, že $d(A, S) = d(S, A) = \frac{1}{2} d(A, B)$

Volný vektor

Zavedeme relaci na $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$, $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2)$ právě tehdy když dvojice (A_1, B_2) a (A_2, B_1) mají stejný střed. Jedná se o relaci ekvivalence a třídám ekvivalence říkáme volné vektory.

Zaměření

Střed dvojice

$A, B \in \mathbb{E}^3$, střed dvojice (A, B) je jednoznačně daný bod $S \in \mathbb{E}^3$ takový, že $d(A, S) = d(S, A) = \frac{1}{2} d(A, B)$

Volný vektor

Zavedeme relaci na $\mathbb{E}^3 \times \mathbb{E}^3$, $(A_1, B_1) \sim (A_2, B_2)$ právě tehdy když dvojice (A_1, B_2) a (A_2, B_1) mají stejný střed. Jedná se o relaci ekvivalence a třídám ekvivalence říkáme volné vektory. Píšeme $u = B_1 - B_2$

$$V_3 = M \times M / \sim \quad \ldots \text{zaměření (volné vektory)}$$

$$V_3^A = \{B - A | B \in \mathbb{E}^3\} \quad \ldots \text{vázané vektory v bodě } A$$

Skalární součin

Velikost vektoru

$$|u| = d(A, B)$$

Skalární součin

Velikost vektoru

$$|u| = d(A, B)$$

Skalární součin

$$\langle u, v \rangle = \frac{1}{2}(|u + v|^2 - |u|^2 - |v|^2)$$

Skalární součin

Velikost vektoru

$$|u| = d(A, B)$$

Skalární součin

$$\langle u, v\rangle = \frac{1}{2}(|u+v|^2 - |u|^2 - |v|^2)$$

Kolmé vektory

$$\langle u, v\rangle = 0$$

Souřadnice

Repér

$$K = \{Q, e_1, e_2, e_3\}$$

Q je bod (počátek), $\{e_1, e_2, e_3\}$ je ortonormální báze V_3. Pro libovolný bod $A \in \mathbb{E}_3$ můžeme psát $A - Q = xe_1 + ye_2 + ze_3$, nebo

$$A = Q + xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

čísla $[x, y, z]$ se nazývají kartézské souřadnice bodu A a dostáváme izometrické zobrazení

$$A \mapsto [x, y, z]$$

Souřadnice

Repér

$$K = \{Q, e_1, e_2, e_3\}$$

Q je bod (počátek), $\{e_1, e_2, e_3\}$ je ortonormální báze V_3. Pro libovolný bod $A \in \mathbb{E}_3$ můžeme psát $A - Q = xe_1 + ye_2 + ze_3$, nebo

$$A = Q + xe_1 + ye_2 + ze_3,$$

čísla $[x, y, z]$ se nazývají kartézské souřadnice bodu A a dostáváme izometrické zobrazení

$$A \mapsto [x, y, z]$$

Fakt

Každý repér v $\mathbb{E}_3$ určuje právě jeden izomorfismus

$$\mathbb{E}_3 \to \mathbb{R}^3$$

Maticově

$$A = \{Q, e_1, e_2, e_3\}\begin{pmatrix}1\\x\\y\\z\end{pmatrix} = Q + xe_1 + ye_2 + ze_3$$

$$A = KA_K, \quad u = Ku_K$$

Změna báze

$K = \{Q, e_1, e_2, e_3\}$, $L = \{R, f_1, f_2, f_3\}$, kde

$$R = \sum_{i=1}^{3} p_i e_i + Q, \quad f_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} e_j$$

Změna báze

$K = \{Q, e_1, e_2, e_3\}$, $L = \{R, f_1, f_2, f_3\}$, kde

$$R = \sum_{i=1}^{3} p_i e_i + Q, \quad f_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} e_j$$

$$\{Q, e_1, e_2, e_3\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ p_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \{R, f_1, f_2, f_3\}$$

Změna báze

$K = \{Q, e_1, e_2, e_3\}$, $L = \{R, f_1, f_2, f_3\}$, kde

$$R = \sum_{i=1}^{3} p_i e_i + Q, \quad f_i = \sum_{j=1}^{3} a_{ij} e_j$$

$$\{Q, e_1, e_2, e_3\} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ p_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ p_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ p_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \{R, f_1, f_2, f_3\}$$

Změna souřadnic při změně báze

Pro $K = Kg$, $A = KA_K = LA_L$ dostaneme

$$A_L = g^{-1} A_K$$

Shodnost

Definice

Zobrazeni $s : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ takové, že

$$d(s(A), s(B)) = d(A, B)$$

Shodnost

Definice

Zobrazeni $s : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ takové, že

$$d(s(A), s(B)) = d(A, B)$$

- Shodnost je prosté zobrazení

Shodnost

Definice

Zobrazeni $s : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ takové, že

$$d(s(A), s(B)) = d(A, B)$$

- Shodnost je prosté zobrazení
- Definujeme indukované zobrazení na V_3
  $s^*(A - B) = s(A) - s(B)$ které zachovává skalární součin

Shodnost

Definice

Zobrazeni $s : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ takové, že

$$d(s(A), s(B)) = d(A, B)$$

- Shodnost je prosté zobrazení
- Definujeme indukované zobrazení na V_3
  $s^*(A - B) = s(A) - s(B)$ které zachovává skalární součin
- Shodnost převádí repér $K = \{Q, e_1, e_2, e_3\}$ na repér
  $\bar{s}(K) = \{s(Q), s^*(e_1), s^*(e_2), s^*(e_3)\}$

Shodnost

Definice

Zobrazeni $s : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ takové, že

$$d(s(A), s(B)) = d(A, B)$$

- Shodnost je prosté zobrazení
- Definujeme indukované zobrazení na V_3
  $s^*(A - B) = s(A) - s(B)$ které zachovává skalární součin
- Shodnost převádí repér $K = \{Q, e_1, e_2, e_3\}$ na repér
  $\bar{s}(K) = \{s(Q), s^*(e_1), s^*(e_2), s^*(e_3)\}$
- Tedy pro každý repér K existuje matice s_k, taková, že
  $\bar{s}(K) = Ks_K$

Shodnost

Definice

Zobrazeni $s : \mathbb{E}_3 \to \mathbb{E}_3$ takové, že

$$d(s(A), s(B)) = d(A, B)$$

- Shodnost je prosté zobrazení
- Definujeme indukované zobrazení na V_3
  $s^*(A - B) = s(A) - s(B)$ které zachovává skalární součin
- Shodnost převádí repér $K = \{Q, e_1, e_2, e_3\}$ na repér
  $\bar{s}(K) = \{s(Q), s^*(e_1), s^*(e_2), s^*(e_3)\}$
- Tedy pro každý repér K existuje matice s_k, taková, že
  $\bar{s}(K) = Ks_K$
- Množina matic přechodu mezi repéry je stejná jako množina matic schodnosti v pevně zvolené bázi. Označme jí $E(3)$.

Ostravice 2012

Exponenciální funkce - definice

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Exponenciální funkce - definice

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Norma

Na $Mat_n(\mathbb{R})$ je definována norma

$$|A| = \max(\sum_{j=0}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, \ldots, n)$$

Exponenciální funkce - definice

$$\exp(A) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n$$

Norma

Na $Mat_n(\mathbb{R})$ je definována norma

$$|A| = \max(\sum_{j=0}^{n} |a_{ij}|,\ i = 1, \dots, n)$$

a tedy

$$\left|(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n)_{ij}\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |(A^n)_{ij}| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |(A^n)| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} |A|^n \leq e^{|A|}$$

Exponenciální funkce - vlastnosti

- Je–li $AB = BA$ pak
  $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$

Exponenciální funkce - vlastnosti

- Je–li $AB = BA$ pak
  $\exp(A + B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$
- $\exp(A) \in GL(n, \mathbb{R})$ a $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$

Exponenciální funkce - vlastnosti

- Je–li $AB = BA$ pak $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$
- $\exp(A) \in GL(n,\mathbb{R})$ a $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$
- Pro každou $g \in GL(n,\mathbb{R})$ platí $\exp(gAg^{-1}) = g\exp(A)g^{-1}$

Jendoparametrické pohyby $E(3)$

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$$

Exponenciální funkce - vlastnosti

- Je–li $AB = BA$ pak
  $\exp(A+B) = \exp(A)\exp(B) = \exp(B)\exp(A)$
- $\exp(A) \in GL(n,\mathbb{R})$ a $\exp(A)^{-1} = \exp(-A)$
- Pro každou $g \in GL(n,\mathbb{R})$ platí $\exp(gAg^{-1}) = g\exp(A)g^{-1}$

Jendoparametrické pohyby $E(3)$

$$\exp(At) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} A^n t^n$$

- $(\exp tA)' = A\exp(tA)$
- $\exp(sA)\exp(tA) = \exp((s+t)A)$
- Tvoří komutativní grupu

Elementární pohyby

Elementárním pohybem v prostoru $\mathbb{E}_3$ nazveme každou jednoparametrickou podgrupou grupy $SE(3)$.

Popis

$$g(t) = \exp(tA) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ p(t) & r(t) \end{pmatrix},$$

kde $t(t) \in O(3)$. Víme, že $g(0) = E$, $g'(t) = Ag(t)$, a tedy $g'(0) = A$.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p'(O) & r'(0) \end{pmatrix}$$

Lieovy algebry

Definice

Lieova algebra A_n je algebra s bilineární operací označovanou $[\ ,\ ]$ pro kterou platí:

- $[u, u] = 0$
- $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$

Vlastnosti

Lieovy algebry

Definice

Lieova algebra A_n je algebra s bilineární operací označovanou $[\ ,\ ]$ pro kterou platí:

- $[u, u] = 0$
- $[u, [v, w]] + [v, [w, u]] + [w, [u, v]] = 0$

Vlastnosti

- $[u, v] + [v, u] = 0$

Vektorový součin na zaměření V_3

Vektorový součin $\times$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, v_1 u_3 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

Vektorový součin na zaměření V_3

Vektorový součin $\times$

$$u \times v = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = (u_2 v_3 - u_3 v_2, v_1 u_3 - u_1 v_3, u_1 v_2 - v_1 u_2)$$

$$u \times (v \times w) = (u \cdot w)v - (u \cdot v)w,$$

kde $\times$ je vektorový a $\cdot$ skalární součin.

Matice M_3

Komutátor

$[A, B] = AB - BA$

Matice M_3

Komutátor

$[A, B] = AB - BA$

$$f : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

Matice M_3

Komutátor

$[A, B] = AB - BA$

$$f : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(u \times v) = [f(u), f(v)]$$

Matice M_3

Komutátor

$[A, B] = AB - BA$

$$f : (a_1, a_2, a_3) \mapsto \begin{pmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$f(u \times v) = [f(u), f(v)]$$

$$f(u)v = u \times v$$

Závorka šroubů

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_1 & y_1 \end{pmatrix} = (x_1||x_2), \;\; X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_2 & y_2 \end{pmatrix} = (y_1||y_2)$$

Závorka šroubů

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_1 & y_1 \end{pmatrix} = (x_1||x_2), \ \ X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_2 & y_2 \end{pmatrix} = (y_1||y_2)$$

$$[X_1, X_2] = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 & y_1 y_2 - y_2 y_1 \end{pmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1 || y_1 y_2 - y_2 y_1)$$

Závorka šroubů

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_1 & y_1 \end{pmatrix} = (x_1||x_2), \;\; X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_2 & y_2 \end{pmatrix} = (y_1||y_2)$$

$$[X_1, X_2] = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 & y_1 y_2 - y_2 y_1 \end{pmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1 || y_1 y_2 - y_2 y_1)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & y \end{pmatrix} = (z||y) = y + z\epsilon, \; \epsilon^2 = 0$$

Závorka šroubů

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_1 & y_1 \end{pmatrix} = (x_1||x_2), \;\; X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z_2 & y_2 \end{pmatrix} = (y_1||y_2)$$

$$[X_1, X_2] = \cdots = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ y_1 z_2 - y_2 z_1 & y_1 y_2 - y_2 y_1 \end{pmatrix} = (y_1 z_2 - y_2 z_1 || y_1 y_2 - y_2 y_1)$$

$$X_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ z & y \end{pmatrix} = (z||y) = y + z\epsilon, \; \epsilon^2 = 0$$

$$[X_1, X_2] = y_1 \times y_2 + (y_1 \times z_2 + z_1 \times y_2)\epsilon$$